

E.X.10 X v.a. de densité f
 soit $a \neq 0, \delta \in \mathbb{R}; Y = aX + \delta;$

a) La densité de Y ;

$$P(Y=y) = P(aX + \delta = y) = \begin{cases} P(X \leq \frac{y-\delta}{a}) & \text{si } a > 0 \\ P(X \geq \frac{y-\delta}{a}) & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Mais comme F_X est continue;

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \begin{cases} F_X\left(\frac{y-\delta}{a}\right) & \text{si } a > 0 \\ 1 - F_X\left(\frac{y-\delta}{a}\right) & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} \Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-\delta}{a}\right) & \text{si } a > 0 \\ -\frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-\delta}{a}\right) & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

donc $f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-\delta}{a}\right) \quad \text{si } a \neq 0.$

b) pour $Y = |X|.$

$$P(Y \leq y) = P(|X| \leq y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ P(-y \leq X \leq y) & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = F_X(y) - F_X(-y), \quad y \in]0; +\infty[.$$

$$f_Y(y) = f_X(y) + f_X(-y).$$

c) pour $Y = X^p, \quad p \in \mathbb{N}.$

et p impair $F_Y(y) = f_X(y^{1/p})$ et $f_Y(y) = \frac{1}{p} y^{\frac{1}{p}-1} f_X(y^{1/p})$

et p pair $P(Y \leq y) = P(|X|^p \leq y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ P(-y^{1/p} \leq X \leq y^{1/p}) & \text{si } y > 0 \end{cases}$
 donc $f_Y(y) = \frac{1}{p} y^{\frac{1}{p}-1} f_X(y^{1/p})$